

# Vortrag im Seminar: Ausgewählte höhere Kurven

Julian Rausch

8. Dezember 2016

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Konchoide des Nikomedes</b>	<b>2</b>
1.1	Namensherkunft . . . . .	2
1.2	Eine Kissoide? . . . . .	2
1.3	Kurvengleichung . . . . .	3
1.3.1	Polardarstellung . . . . .	3
1.3.2	Kartesische Koordinaten . . . . .	3
1.4	Auswertung der Kurvengleichung . . . . .	4
1.4.1	Symmetrie . . . . .	4
1.4.2	Asymptotik . . . . .	4
1.4.3	Zugehörigkeit des O-Punktes . . . . .	5
1.5	Verwendung zur Winkeldreiteilung . . . . .	5
1.5.1	Konstruktion . . . . .	5
1.5.2	Beweis . . . . .	6
1.6	Einschiebung nach Pappos . . . . .	6
1.7	Verwendung zur Würfelverdopplung . . . . .	7
1.7.1	Konstruktion eines $60^\circ$ Winkels . . . . .	7
1.7.2	Konstruktion . . . . .	8
1.7.3	Beweis . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Allgemeine Konchoide</b>	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>Kardioide</b>	<b>10</b>
3.1	Kardioide als Kreiskonchoide . . . . .	10
3.2	Kurvengleichungen . . . . .	11
3.2.1	Polardarstellung . . . . .	11
3.2.2	Kartesische Koordinaten . . . . .	11
3.3	Auswertung der Kurvengleichung . . . . .	11
3.3.1	Symmetrie . . . . .	11

3.3.2	Die weitesten links gelegenen Punkte . . . . .	12
3.4	Kardioide als Epizykloide . . . . .	12
3.4.1	Beweis: . . . . .	13
3.5	Tangentenkonstruktion . . . . .	14
3.5.1	Theorie des augenblicklichen Drehpunktes . . . . .	14
3.5.2	Tangentenkonstruktion anhand der Kardioide als Epizykloide . . .	14
3.6	Quadratur der Kardioide . . . . .	14
3.7	Kardioide als Kaustik eines Kreises . . . . .	14

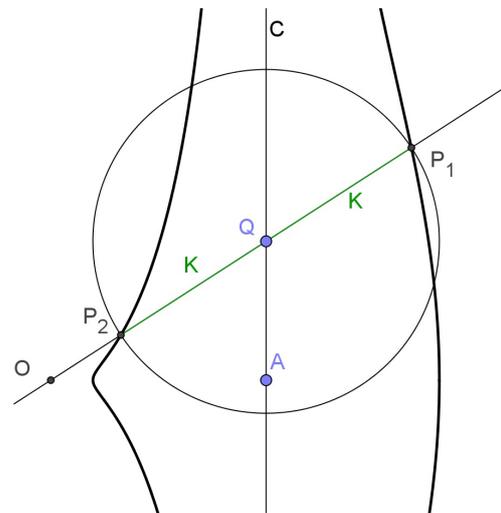
# 1 Konchoide des Nikomedes

Im Folgenden möchten wir die sogenannte Konchoide des Nikomedes betrachten.

## 1.1 Namensherkunft

Namengeber dieser Kurve ist Nikomedes (280 v. Chr. - 210 v. Chr.), ein griechischer Mathematiker. Er führte die von ihm wegen ihrer Ähnlichkeit mit einer Muschel (griech.  $\kappa\omicron\delta\gamma\chi\omicron\varsigma$  = Muschel) als Konchoide bezeichnete Kurve zur geometrischen Lösung des Problems der Winkeldreiteilung und Würfelvolumenverdopplung ein.

**Definition:** Die *Eigentliche Konchoide* oder *Konchoide des Nikomedes* ist der geometrische Ort der Punkte  $P$ , dessen Verbindungslinie  $OP$  mit einem festen Punkt  $O$  (Pol) durch eine feste Gerade  $C$  (Basis) so geschnitten werden, dass  $P$  einen gegebenen Abstand  $K$  zu diesem Schnittpunkt besitzt.



**Konstruktion:** Zur Konstruktion sind der Punkt  $O$  (Pol), die Gerade  $C$  (Basis) und die Länge  $K$  vorgegeben.

Drehe eine Gerade in  $O$  so, dass sie die Gerade  $C$  in  $Q$  schneidet. Schlage dann einen Kreis mit Radius  $K$  um  $Q$ . Die Menge aller auf diese Weise entstehenden Schnittpunkte  $P_1$  und  $P_2$  mit der Gerade durch  $O$  und  $Q$  ergeben die Konchoide des Nikomedes.

## 1.2 Eine Kissoide?

**Behauptung:** Betrachten wir den Fall einer Kissoide in der die erste Kurve  $f$  ein Kreis mit Radius  $K$  um den Punkt  $P$  ist und die zweite Kurve  $g$  eine Gerade ist, so erhalten

wir die Konchoide des Nikomedes. In anderen Worten: Bei der Konchoide des Nikomedes handelt es sich um eine Kissoide.

**Beweis:** Sei  $F$  der Punkt in dem die Gerade durch  $P$  den Kreis  $f$  schneidet. Sei  $G$  der Punkt in dem die Gerade durch  $P$  die Gerade  $g$  schneidet und  $C$  der Punkt auf der Geraden durch  $P$  der auf der Kurve liegt. Nach Konstruktion der allgemeinen Kissoide gilt:

$$|PC| = |PG - PF| = |FG|$$

Es gilt  $|PF| = K$ , da  $f$  ein Kreis um  $P$  ist mit Radius  $K$  ist, damit folgt  $|CG| = |PG - PC| = |PG - (PG - PF)| = |PF| = K$

### 1.3 Kurvengleichung

Anhand der nun bekannten Eigenschaften und Konstruktionsvorschriften für die Konchoide des Nikomedes lässt sich eine allgemeine Kurvengleichung herleiten. Diese möchten wir in Polardarstellung und in kartesischen Koordinaten darstellen.

#### 1.3.1 Polardarstellung

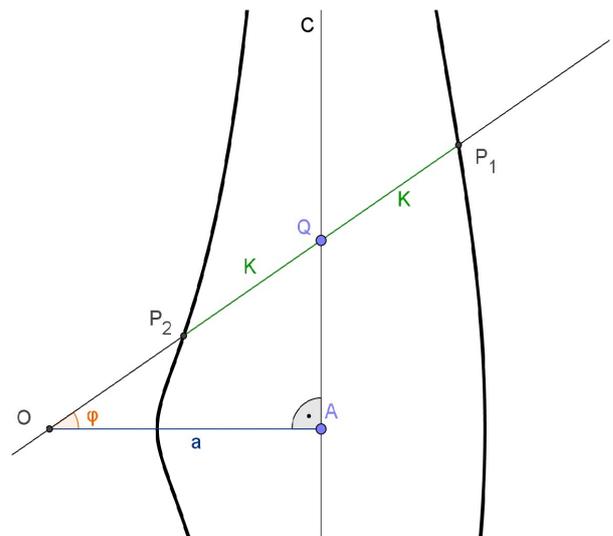
Nun sei  $a$  der Abstand der Gerade  $C$  zum Pol  $O$ . An der obigen Abbildung und der Konstruktion erkennbar werden jedem Winkel  $\varphi$  zwei Punkte und damit zwei Radien in der Polardarstellung zugeordnet.

$$P_1 : r = \frac{a}{\cos \varphi} + K \text{ oder } \left( r - \frac{a}{\cos \varphi} \right) - K = 0$$

$$P_2 : r = \frac{a}{\cos \varphi} - K \text{ oder } \left( r - \frac{a}{\cos \varphi} \right) + K = 0$$

Daraus ergibt sich eine Gleichung in Polarkoordinaten, die in quadratischer Form beide Radien einem Winkel  $\varphi$  zuweist.

$$\left( r - \frac{a}{\cos \varphi} \right)^2 = K^2 \quad (1)$$



#### 1.3.2 Kartesische Koordinaten

Zum Erhalten einer Darstellung in kartesischen Koordinaten ersetzen wir die Polarkoordinaten auf folgende Weise:

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

## 1 Konchoide des Nikomedes

Da  $\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{r}{x}$  gilt, ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned}\left(r - \frac{ar}{x}\right)^2 &= K^2 \\ r^2 - \frac{2ar^2}{x} + \frac{a^2r^2}{x^2} &= K^2 \\ r^2x^2 - 2axr^2 + a^2r^2 &= K^2x^2 \\ r^2 \cdot (x^2 - 2ax + a^2) &= K^2x^2 \\ r^2 \cdot (x - a)^2 &= K^2x^2\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die gesuchte Gleichung für die Darstellung in kartesischen Koordinaten:

$$(x^2 + y^2)(x - a)^2 = K^2x^2 \quad (2)$$

### 1.4 Auswertung der Kurvengleichung

Nun sollen die anhand der verschiedenen Darstellungsformen erkennbaren Eigenschaften der Kurve aufgeführt und bewiesen werden.

#### 1.4.1 Symmetrie

Die Kurve ist erkennbar symmetrisch zur x-Achse, denn y tritt nur in gerader Potenz in der Kurvengleichung auf.

$$(x^2 + y^2)(x - a)^2 = (x^2 + (-y)^2)(x - a)^2$$

#### 1.4.2 Asymptotik

Ist  $x = a$ , so kann die Kurvengleichung nur existieren, wenn auch  $x \rightarrow \pm\infty$  gilt, d.h. die Basisgerade C ist Asymptote der Kurve. Wir stellen zum Nachweis die Kurvengleichung nach y um.

$$\begin{aligned}y^2(x - a)^2 &= K^2x^2 - x^2(x - a)^2 \\ y^2 &= \frac{K^2x^2}{(x - a)^2} - x^2\end{aligned}$$

Für  $x \rightarrow a$  folgt somit für y:

$$y^2 = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{K^2x^2}{(x - a)^2} - x^2 \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{K^2x^2}{(x - a)^2} \right) - a^2 = \infty$$

Das bedeutet  $x = a$  kann nur dann gelten, wenn  $y = \pm\infty$  gilt.

### 1.4.3 Zugehörigkeit des O-Punktes

Der  $O$ -Punkt gehört für jedes  $K$  und jedes  $a$  der Kurve des Nikomedes an. Dies scheint bei erstem Betrachten im Falle  $K < a$  nicht der Fall zu sein, daher werden wir dies für die drei Beziehungen von  $K$  und  $a$  nachweisen.

**Beweis:** Der auf der Seite des  $O$ -Punkt liegende Kurvenzweig hat die Polargleichung

$$r = \frac{a}{\cos \varphi} - K$$

Damit dieser Punkt auf dem  $O$ -Punkt liegt muss  $r = 0$  gelten:

$$\frac{a}{\cos \varphi} = K$$

Daraus ergibt sich die Bedingungsgleichung

$$\cos \varphi = \frac{a}{K} \tag{3}$$

1. Fall  $a > K$

Damit ist  $\frac{a}{K} > 1$  und wir finden keinen Winkel  $\varphi$ , der Bedingungsgleichung 3 löst. Dennoch gehört der  $O$ -Punkt als isolierter Punkt der Kurve an. Dazu betrachten wir die Kurvengleichung 2, welche für  $x = 0, y = 0$  erfüllt ist. Somit gehört der  $O$ -Punkt der Kurve an.

2. Fall  $a = K$

Für  $\varphi = 0$  gilt  $\cos \varphi = 1 = \frac{a}{K}$ . Somit ist die Bedingungsgleichung 3 für  $\varphi = 0$  erfüllt und der  $O$ -Punkt gehört der Kurve an.

3. Fall  $a < K$

In diesem Fall hat die Bedingungsgleichung 3 zwei entgegengesetzte Werte  $\varphi$  und  $\varphi' = 360^\circ - \varphi$ , welche sie lösen. Da nun der  $\cos \varphi$  irgendwo zwischen 0 und 1 liegt und diese Werte für  $0 < \varphi < 360^\circ$  zweimal annimmt.

## 1.5 Verwendung zur Winkeldreiteilung

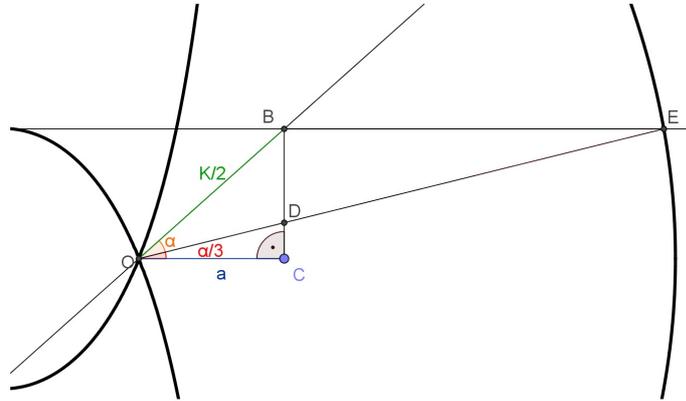
Die Konchoide des Nikomedes findet ebenso wie die Trisektix von MacLaurin eine Anwendung in der Winkeldreiteilung. Im Gegensatz zur Trisektix brauchen wir aber für jeden Winkel eine eigens konstruierte Konchoide.

### 1.5.1 Konstruktion

- Spanne einen Winkel  $\alpha$  in einem Punkt  $O$  auf.
- Bilde den Lotfußpunkt  $C$  vom Punkt  $B$  auf einem der Schenkel auf die Gerade des anderen Schenkel.

## 1 Konchoide des Nikomedes

- Zeichne eine Konchoide mit  $a = OC$  und  $K = 2 \cdot OB$  mit  $O$  als Pol und Gerade durch  $B$  und  $C$  als Basis.
- Ziehe nun durch  $B$  eine parallele Gerade zu  $OC$ , welche den rechten Ast der Konchoide in  $E$  schneidet.
- Der Winkel  $\angle COE$  ist der gedrittete Ausgangswinkel  $\alpha$ .

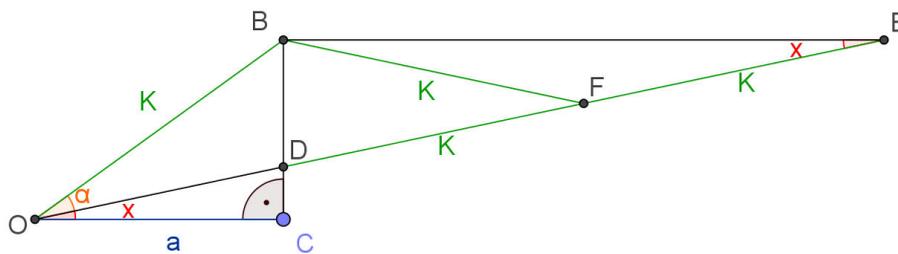


### 1.5.2 Beweis

Wir nennen den gesuchten Winkel  $COD := x$ . Nach Wechselwinkel, gilt auch  $BEF = x$ . Zeichne den Mittelpunkt  $F$  von  $DE$  ein. Somit gilt  $DF = FE = K$ . Außerdem gilt nach Satz des Thales, da  $DBE = 90^\circ$ , dass  $B$  auf dem Kreis um  $F$  mit Radius  $K$  liegt. Somit gilt auch  $BF = K$ . Daraus ergibt sich, dass  $\triangle BEF$  und  $\triangle OBF$  gleichschenklige Dreiecke sind. Damit ergibt sich

$$\angle FBE = \angle BEF = x$$

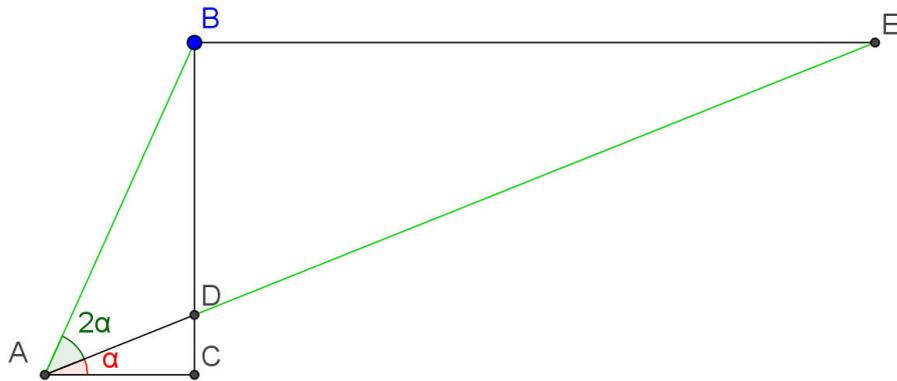
$$\angle BOF = \angle BFO = 180^\circ - \angle BFE = 180^\circ - (180^\circ - (\angle FBE + \angle BEF)) = 2x$$



## 1.6 Einschreibung nach Pappos

Pappus von Alexandria (griechisch *Pappos* oder latinisiert *Pappus Alexandrinus*), war ein griechischer Mathematiker und Astronom des 4. Jahrhunderts aus Alexandria. Sein

Hauptwerk sind die Mathematischen Sammlungen, welche eine kommentierte und durch eigene Erkenntnisse ergänzte Sammlung bereits bekannter mathematischer Ergebnisse darstellt. Das nun folgende Vorgehen zur Winkeldreiteilung nach Pappos entstammt in ähnlicher Art eben dieser Mathematischen Sammlung.



### Konstruktion

- Sei ein zu drittelnder Winkel  $3 \cdot \alpha$  in Punkt  $A$  gegeben
- Sei  $B$  ein beliebiger Punkt auf einem der Schenkel
- Sei  $C$  der Lotfußpunkt von  $B$  auf dem anderen Schenkel
- Ziehe nun durch  $B$  eine parallele Gerade zu  $AC$
- Lege nun in  $A$  das Lineal so an, dass es  $BC$  in  $D$  schneidet und die Parallele zu  $AC$  in  $E$  schneidet, so dass gilt  $DE = 2 \cdot AB$
- Damit entsteht in  $\angle DAC = \frac{1}{3} \cdot \angle CAB$  der gesuchte Winkel.

## 1.7 Verwendung zur Würfelverdopplung

Neben der Winkeldreiteilung ist mit der Konchoide des Nikomedes auch die Verdopplung eines Würfelvolumens möglich. Somit ist es im Gegensatz zur Trisektix von MacLaurin mit der Konchoide des Nikomedes möglich, beide Probleme zu lösen.

### 1.7.1 Konstruktion eines $60^\circ$ Winkels

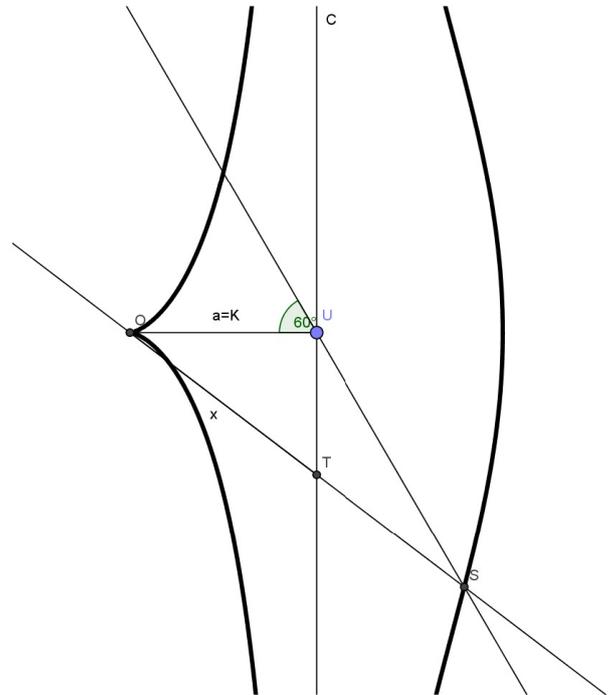
- Zeichne von Punkt  $A$  mit einem Schenkel.
- Ziehe einen Kreis mit beliebigen aber festem Radius  $r$
- Ziehe einen weiteren Kreis mit Radius  $r$  um den Schnittpunkt des anderen Kreises mit der Geraden.

- Der Schnittpunkt der beiden Kreise ist ein Punkt auf dem zweiten Schenkel des  $60^\circ$  Winkels.

**Begründung:** Da hierdurch ein gleichseitiges Dreieck konstruiert wird, sind die entstehenden Winkel  $60^\circ$ .

### 1.7.2 Konstruktion

- Zeichne eine Konchoide mit  $a = K =$  gegebene Würfelkantenlänge. Mit  $O$  als Pol und Gerade  $C$  als Basis.
- Ziehe durch den Punkt  $U$  auf der Basis  $C$  der Konchoide im  $60^\circ$  Winkel zum Pol eine Gerade, die den rechten Zweig der Kurve in  $S$  schneidet.
- Der Schnittpunkt der Basis  $C$  und der Gerade durch  $O$  und  $S$  sei  $T$ .
- Somit ist  $OT$  die Würfelkantenlänge eines Würfels mit doppeltem Volumen.





## 2 Allgemeine Konchoide

$$x^2 = ay$$

Setzen wir dieses Ergebnis in Gleichung 5 ein folgt:

$$\begin{aligned}x^2 + 2ax &= y^2 + x^2 \\ y^2 &= 2ax\end{aligned}\tag{6}$$

Quadrieren wir nun Gleichung 4 ergibt sich

$$\begin{aligned}4a^2 &= \frac{x^2 y^2}{a^2} \\ y^2 x^2 &= 4a^4\end{aligned}$$

Setzen wir hier nun Gleichung 6 ein folgt:

$$\begin{aligned}2ax^3 &= 4a^4 \\ x^3 &= 2a^3 \\ x &= \sqrt[3]{2} \cdot a\end{aligned}$$

Somit ist die Konstruktion bewiesen.

## 2 Allgemeine Konchoide

Wollen wir unsere Definition der Konchoide des Nikomedes noch weiter verallgemeinern bietet sich die Möglichkeit die Gerade C durch eine beliebige Kurve C zu ersetzen was zu folgender allgemeineren Definition führt:

**Definition:** *Die allgemeine Konchoide ist eine Kurve, für welche jeder Punkt P der Kurve den gleichen Abstand K zum Schnittpunkt der Gerade durch P und einen festen Punkt O mit einer festen Kurve C hat.*

## 3 Kardioide

Wir nutzen unsere allgemeinere Definition nun, um die Basiskurve als Kreis zu wählen und kommen auf eine neue spezielle allgemeine Konchoide mit folgender Erzeugungsweise.

### 3.1 Kardioide als Kreiskonchoide

- Gegeben sei ein Kreis um Mittelpunkt  $M$  mit Durchmesser  $K$  und ein  $O$ -Punkt auf diesem Kreis.
- Man ziehe eine Sehne  $OQ$ .
- Man trage nach beiden Seiten auf ihrer Verlängerung  $QP_1 = QP_2 = K$  ab.
- Man drehe die Sehne um  $O$ -Punkt, dann beschreiben  $P_1$  und  $P_2$  die Kardioide.

## 3.2 Kurvengleichungen

Wir leiten nun anhand dieser Konstruktionsbeschreibung allgemeine Kurvengleichungen in Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten her. Dazu sei  $\varphi$  der Drehwinkel der Sehne.

### 3.2.1 Polardarstellung

Wir stellen nun Polarkoordinaten für die beiden Punkte  $P_1$  und  $P_2$  auf.

$$P_1 : r = K + K \cdot \cos \varphi$$

$$P_2 : r = K - K \cdot \cos \varphi$$

Jedoch lässt sich  $P_2$  durch eine Drehung um  $\varphi + \pi$  erzeugen. Somit ist die Gleichung  $P_2$  bereits in der Gleichung von  $P_1$  enthalten und andersherum. Wir wählen hier die Gleichung zu  $P_1$  als Polardarstellung:

$$r = K \cdot (1 + \cos \varphi) = 2a \cdot \cos^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right) \quad (7)$$

### 3.2.2 Kartesische Koordinaten

Zum Erhalten einer Darstellung in kartesischen Koordinaten ersetzen wir wie in Abschnitt 1.3.2. Damit ergibt sich aus Gleichung 7 nach ein paar Rechenschritten die Polardarstellung:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= a \cdot \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= a + \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ x^2 + y^2 &= a \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + ax \\ a \cdot \sqrt{x^2 + y^2} &= x^2 + y^2 - ax \\ a^2 \cdot (x^2 + y^2) &= (x^2 + y^2 - ax)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

## 3.3 Auswertung der Kurvengleichung

Wir können erneut anhand der aufgeführten Darstellungsformen und der Konstruktionsvorschrift Eigenschaften der Kardioide erkennen.

### 3.3.1 Symmetrie

Die Kurve ist symmetrisch zur  $x$ -Achse, beziehungsweise zur Gerade durch den  $O$ -Punkt und den Mittelpunkt  $M$  des festen Kreises, da in der Kurvengleichung  $y$  nur in geraden Potenzen auftritt. (siehe Gleichung 8)

$$a^2 \cdot (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2 - ax) = a^2 \cdot (x^2 + (-y)^2) - (x^2 + (-y)^2 - ax)$$

### 3.3.2 Die weitesten links gelegenen Punkte

Am Bild der Kardioide erkennbar besitzt sich für ein  $x$  eine Doppeltangente auf der linken Seite der Kurve. Das bedeutet eine Tangente, welche die Kurve an zwei Stellen berührt. Zur Berechnung dieser Doppeltangente suchen wir diese Gerade mithilfe der Geradengleichung  $x = d$ . Einsetzen in die kartesische Darstellungsform aus Gleichung 8 ergibt:

$$a^2 (d^2 + y^2) = (d^2 + y^2 - ad)^2$$

Woraus sich für  $y$  folgendes ergibt:

$$a^2 d^2 + a^2 y^2 = d^4 + y^4 + a^2 d^2 + 2d^2 y^2 - 2ady^2 - 2ad^3$$

$$y^4 - 2ady^2 + 2d^2 y^2 - a^2 y^2 + d^4 - 2ad^3 = 0$$

$$y^4 + y^2 (2d^2 - 2ad - a^2) + (d^4 - 2ad^3) = 0$$

$$y^2 = -\frac{2d^2 - 2ad - a^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2d^2 - 2ad - a^2}{2}\right)^2 - (d^4 - 2ad^3)}$$

$$y^2 = \frac{a^2}{2} + ad - d^2 \pm \sqrt{a^2 d^2 + d^4 + \frac{a^4}{4} - 2ad^3 + a^3 d - a^2 d^2 - d^4 + 2ad^3}$$

$$y^2 = \frac{a^2}{2} + ad - d^2 \pm \sqrt{\frac{a^4}{4} + a^3 d}$$

$$y^2 = \frac{a^2}{2} + ad - d^2 \pm \frac{1}{2} a \sqrt{a^2 + 4ad}$$

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + 2ad - 2d^2 \pm a \sqrt{a^2 + 4ad}}$$

Somit ergeben sich, wenn für die Diskriminante  $a^2 + 4ad = 0$  gilt, zwei reelle Schnittpunkte für  $d = -\frac{a}{4}$

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{8} \pm a \sqrt{a^2 - a^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{8a^2}{8} - \frac{4a^2}{8} - \frac{a^2}{8}} = \pm \frac{3a^2}{16} = \pm \frac{a}{4} \sqrt{3}$$

Somit berührt die Doppeltangente die Kurve in  $\left(-\frac{a}{3} \mid \frac{\sqrt{3}}{4} a\right)$  und  $\left(-\frac{a}{3} \mid -\frac{\sqrt{3}}{4} a\right)$ .

## 3.4 Kardioide als Epizykloide

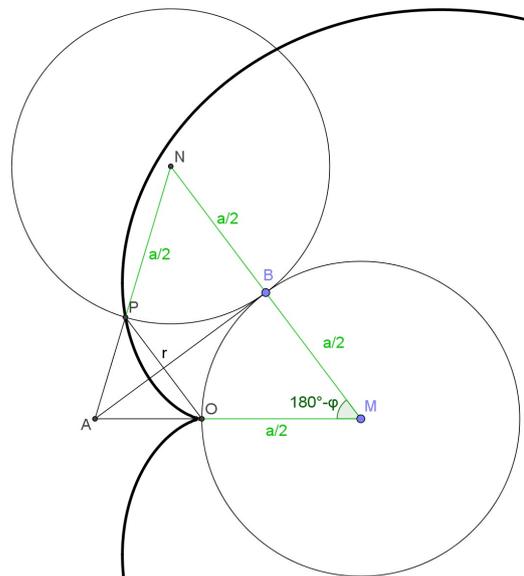
**Definition:** Wird ein Kreis von Radius  $a$  auf einer Leitkurve von abgerollt, so beschreibt ein Punkt auf dem abgerollten Kreisumfang eine Zykloide.

**Definition:** Wird ein Kreis von Radius  $a$  außen auf einem Kreis von Radius  $b$  abgerollt, so beschreibt ein Punkt auf dem abgerollten Kreisumfang eine Epizykloide. Dies ist ein Spezialfall der Zykloide.

Wählen wir die beiden Kreise zur Beschreibung einer Epizykloide mit gleichem Radius  $b$ , so entsteht eine Kardioide, also insbesondere eine Konchoide.

3.4.1 Beweis:

Wir legen den 0-Punkt in den Punkt des Kreises auf dem abgerollt wird, in welchem mit dem abrollen des äußeren Kreises begonnen wird. Dazu führen wir  $\varphi$  und  $r$  als Polarkoordinaten zum Punkt  $P$  auf der Kurve ein. Außerdem wählen wir die Kreisradien mit  $b = \frac{a}{2}$ . Des weiteren sei  $A$  der Schnittpunkt der Gerade durch  $P$  und  $N$  mit der Gerade durch  $O$  und  $M$ , die sich als  $x$ -Achse identifizieren lässt.  $B$  sei der Berührungspunkt der beiden Kreise im Abrollungsprozess. Durch den Abrollungsprozess, der im  $O$ -Punkt startet ist gegeben, dass die abgerollten Strecken also die Bögen durch  $PB$  und  $OB$  gleich sind. Damit gilt auch für die zu den Kreissegmenten gehörigen Winkel  $\angle PNB = \angle BMO$ . Somit ist  $\triangle AMN$  gleichschenkelig. Damit ist die Strecke  $AB$  senkrecht auf  $NM$  und  $OP \parallel MN$  ist. Somit gilt als Stufenwinkel  $\angle BMO = \angle POA = 180^\circ - \varphi$ . Somit gilt im rechtwinkligen Dreieck  $ABM$ :



$$\cos(180^\circ - \varphi) = \frac{a}{2 \cdot AM}$$

$$AM = \frac{a}{2 \cos(180^\circ - \varphi)}$$

Nach Strahlensatz in den Dreiecken  $\triangle AOP$  und  $\triangle ANM$  gilt.

$$\frac{PO}{NM} = \frac{AO}{AM}$$

$$\frac{r}{a} = \frac{AM - OM}{AM}$$

$$\frac{r}{a} = \frac{\frac{a}{2 \cos(180^\circ - \varphi)} - \frac{a}{2}}{\frac{a}{2 \cos(180^\circ - \varphi)}}$$

$$\frac{r}{a} = \frac{a - a \cos(180^\circ - \varphi)}{2 \cos(180^\circ - \varphi)} \cdot \frac{2 \cos(180^\circ - \varphi)}{a}$$

$$\frac{r}{a} = 1 - \cos(180^\circ - \varphi)$$

$$r = a(1 + \cos \varphi)$$

Somit sind wir zur Polardarstellung (Vgl. Gleichung 7) der Kardioide gelangt und die Konstruktion erzeugt damit eine Kardioide.

## 3.5 Tangentenkonstruktion

### 3.5.1 Theorie des augenblicklichen Drehpunktes

**Satz:** Die Kurvennormale in jedem Punkt  $P$  einer Kurve, welche durch die Bewegung eines starren Systems erzeugt werden kann, geht durch Punkt  $P$  und den augenblicklichen Drehpunkt.

Die Tangentenkonstruktion mithilfe des augenblicklichen Drehpunktes wurde vor allem durch Torricelli und Roberval begründet. Diese Theorie lässt sich bei allen Kurven anwenden, welche durch Bewegung eines starren Systems erzeugt werden können.

Grundgedanke dabei ist, dass die Richtung der Tangente in einem bestimmten Kurvenpunkt mit der Bewegungsrichtung dieses Punktes als Punkt des bewegten Systems im Augenblick hat. Diese momentane Bewegung ist eine Drehbewegung um einen bestimmten Punkt, den augenblicklichen Drehpunkt. Verbindet man nun den Punkt und den augenblicklichen Drehpunkt stellt diese Verbindung den Radius des Kreises dar, auf dem der Kurvenpunkt sich gerade bewegt und ist somit Kurvennormale.

**Folgerung:** Die Senkrechte zu dieser Kurvennormalen ist die Kurventangente.

### 3.5.2 Tangentenkonstruktion anhand der Kardioide als Epizykloide

Mithilfe der Theorie zum augenblicklichen Drehpunkt lässt sich durch die in Abschnitt 3.1 vorgestellten Erzeugungsweise als Epizykloide sehr schnell die Kurventangente bestimmen. Innerhalb des Drehvorgangs ist der Berührungspunkt  $B$  der beiden Kreise der augenblickliche Drehpunkt des Kurvenpunktes  $P$ , womit  $PD$  die Kurvennormale ist. Somit lässt sich die Kurventangente einfach als senkrechte zu  $PD$  durch den Kurvenpunkt  $P$  konstruieren.

## 3.6 Quadratur der Kardioide

Die ganze Kurve besitzt den Flächeninhalt  $F = \frac{3a^2\pi}{2}$  also sechsmal so groß, wie der des Kreises, aus dem die Kurve durch Abrollen entstanden ist. Des weiteren erhalten wir für den Umfang der ganzen Kurve  $U = 8a$ . Die Kardioide ist somit sechzehnmal so lang wie der Radius des Kreises, durch dessen Abrollen sie entsteht.

## 3.7 Kardioide als Kaustik eines Kreises

Sei eine punktuelle Lichtquelle auf dem Kreis, dessen Strahlen am Kreis reflektiert werden, so umhüllen diese reflektierten Strahlen eine Kardioide.

